Chapitre 1
Compléments d'algèbre linéaire

Exercice 1 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $f_n(x) = x^n e^x$. Montrer que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est libre.

Exercice 2 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $f_n(x) = \cos(nx)$.

1. Pour $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, calculer l'intégrale

$$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)dt.$$

2. En déduire que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est libre.

Exercice 3 : Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $f_a(x) = e^{ax}$. Montrer que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est libre.

Exercice 4 : On définit $F = \mathrm{Vect}((1,0,0,1))$, $G = \mathrm{Vect}((1,1,1,1))$ et

$$\begin{aligned} H_1 &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = z, \quad y = t\}, \\ H_2 &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + t = 0, \quad y + z = 0\}. \end{aligned}$$

Étudier si $\mathbb{R}^4 = F \oplus G \oplus H_1$ et si $\mathbb{R}^4 = F \oplus G \oplus H_2$?

Exercice 5 : Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On considère les trois sous-espaces vectoriels

$$F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}, \qquad G = \{f \in E \mid f \text{ est linéaire}\},$$
$$H = \{f \in E \mid f \text{ est constante}\}.$$

Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.

Exercice 6 : Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On définit également

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \quad \text{et} \quad D = \mathrm{Vect}\big((1,0,1)\big).$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = H \oplus D$.
2. Montrer que H et D sont stables par u.
3. Écrire la matrice de u dans une base adaptée à la somme directe ci-dessus.

Exercice 7 : Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

On définit également $H = \mathrm{Vect}\big((1,-3,0),(0,1,-1)\big)$ et $D = \mathrm{Vect}\big((3,1,1)\big)$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = H \oplus D$.
2. Montrer que H et D sont stables par u.
3. Écrire la matrice de u dans la base $\mathscr{B} = \big((1,-3,0),(0,1,-1),(3,1,1)\big)$.

Exercice 8 : Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ donné par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad u(P) = X^2 P\left(\frac{1}{X}\right).$$

On définit également $H = \mathrm{Vect}(1, X^2)$ et $D = \mathrm{Vect}(X)$.

1. Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = H \oplus D$.
2. Montrer que H et D sont stables par u.
3. Écrire la matrice de u dans la base $\mathscr{B} = (1, X^2, X)$.

Exercice 9 : Soient E un espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par u.

Exercice 10 : Montrer que l'ensemble

$$H = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(M) = 0\}$$

est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 11 : Existe-t-il des matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $AB - BA = \mathrm{I}_n$?

Exercice 12 : Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $AB - BA = A$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{Tr}(A^p) = 0$.

Exercice 13 : Calculer la trace de $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dans chacun des cas suivants.

(i) $u(x, y, z) = (x + y + z, x + z, y + z)$, (ii) $u(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$.

Exercice 14 : Calculer la trace de $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])$ dans chacun des cas suivants.

(i) $u(P) = P + P'$, (ii) $u(P) = P(X+1) - P(X)$, (iii) $u(P) = XP' + P(1)$.

Exercice 15 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de rang 1.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E tel que toutes les colonnes de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ sauf la dernière soient nulles.
2. En déduire que $u^2 = \mathrm{Tr}(u) \cdot u$.

Exercice 16 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur.

1. Démontrer que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.
2. Écrire la matrice de p dans une base adaptée à $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.
3. En déduire que $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rang}(p)$.

Exercice 17 : On note $S_n(\mathbb{R})$ (resp. $A_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
3. Décomposer la matrice ci-dessous selon cette somme directe

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Déterminer la dimension de $S_n(\mathbb{R})$ et la dimension de $A_n(\mathbb{R})$.

Exercice 18 : Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques. Montrer que AB est symétrique si et seulement si A et B commutent.

Exercice 19 : Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les matrices MM^{T} et $M^{\mathrm{T}}M$ sont symétriques.

Exercice 20 : Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Exprimer $X^{\mathrm{T}}X$ en fonction de $x_1, \ldots, x_n$. En déduire que $X^{\mathrm{T}}X = 0$ si et seulement si $X = 0$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Ker}(M^{\mathrm{T}}M)$.